



**Olimpiada Națională de Matematică 2016**

**Etapă locală – Iași, 1 februarie 2016**

**CLASA A V- A**

**Problema 1.**

Calculați:  $(37^{2016} : 1369^{1008}) : (2^{2016} - 2^{2015} - \dots - 2^2 - 2 - 1)$

**Problema 2.**

Se consideră numărul natural  $A = \overline{4a} + \overline{a4}$ , unde  $a$  este o cifră diferită de 0. Se cere:

- a) Determinați cifra  $a$  pentru care numărul  $A$  este pătrat perfect.
- b) Arătați că nu există  $a$  astfel încât numărul  $A$  să fie cub perfect.

**Problema 3.**

Determinați o mulțime finită  $M$  de numere naturale consecutive, știind că diferența dintre cel mai mare și cel mai mic element este 2015, iar suma celor mai mici trei elemente ale mulțimii  $M$  este 2016.

**Problema 4.**

Un pițigoi a vizitat într-o zi 50 de crengi de copac. Pe prima creangă a ciripit o dată, pe a doua creangă a ciripit de două ori și tot așa până când pe a 50-a creangă a ciripit de 50 de ori. Pițigoiul răgușește dacă într-o zi ciripește de 999 de ori. Răspundeți la următoarele întrebări:

- a) A răgușit pițigoiul în acea zi?
- b) De câte ori a ciripit răgușit?
- c) De câte ori a ciripit răgușit pe creanga pe care a răgușit?

*Timp de lucru: 2 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



**Olimpiada Națională de Matematică 2016**

**Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016**

**CLASA A VI A**

**Problema 1.** Se consideră trei puncte coliniare  $A, B$  și  $C$  astfel încât  $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$  și  $AC = 40$  cm. Fie  $M$  și  $P$

mijloacele segmentelor  $[AB]$ , respectiv  $[BC]$ .

a) Să se determine lungimile segmentelor  $[AB]$  și  $[BC]$ .

b) Să se determine valoarea raportului  $\frac{AP}{MC}$ .

**Problema 2.** a) Simplificați fracția  $\frac{64}{ab64 - 36 \cdot ab}$ ,  $a \neq 0$ , astfel încât să devină ireductibilă.

b) Demonstrați că numărul  $n = 3^{23} + 5^{23} + 15^{23}$  este divizibil cu 23.

**Problema 3.** Fie  $n$  și  $k$  numere naturale mai mari decât 2. Vom spune că  $n$  este *atras* de  $k$ , dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1)  $n$  este divizibil cu  $k$  și are  $k - 1$  divizori;

2) suma divizorilor lui  $n$  este divizibilă cu  $k$ , dar nu este divizibilă cu  $k + 1$ .

Să se determine cel mai mic număr  $n$  de trei cifre atras de 7.

**Problema 4.** Unghiul alungit  $\sphericalangle A_1OA_{19}$  este împărțit în 18 unghiuri adiacente două câte două de semidreptele  $[OA_2, [OA_3, \dots, [OA_{18}$ , astfel încât  $m(\sphericalangle A_2OA_3) = m(\sphericalangle A_1OA_2) + 1^\circ$ ,

$m(\sphericalangle A_3OA_4) = m(\sphericalangle A_2OA_3) + 1^\circ$ ,  $m(\sphericalangle A_4OA_5) = m(\sphericalangle A_3OA_4) + 1^\circ$ , ...,  $m(\sphericalangle A_{18}OA_{19}) = m(\sphericalangle A_{17}OA_{18}) + 1^\circ$ .

a) Demonstrați că  $1^\circ < m(\sphericalangle A_1OA_2) < 2^\circ$ .

b) Demonstrați că  $m(\sphericalangle A_1OA_3)$  este exprimată printr-un număr natural de grade.

c) Demonstrați că  $OA_{12} \perp OA_{18}$ .

*Timp de lucru 2 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



**Olimpiada Națională de Matematică 2016**

**Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016**

**CLASA A VII- A**

**Problema 1.** Aflați numerele naturale nenule  $n$ , astfel încât  $\sqrt{n!+3} \in \mathbb{Q}$ , unde  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

**Problema 2.** Trei copii se joacă cu numere, în 2017 pași, astfel: la pasul 1 fiecare dintre ei are în mână un cartonaș pe care este scris un număr rațional pozitiv care nu este număr natural și astfel încât suma numerelor de pe cele trei cartonașe să fie număr natural. La pasul  $k$  fiecare dintre ei își pune cartonașul la spate și-l înlocuiește cu un altul pe care este scris numărul ce reprezintă suma numerelor celorlalți doi, de la pasul  $k-1$ , unde  $2 \leq k \leq 2017$ . Demonstrați că:

- a) la fiecare pas, suma numerelor aflate pe cartonașele din mâinile lor este număr natural;
- b) la fiecare pas, numărul aflat pe cartonașul din mâna fiecărui copil nu este natural;
- c) la pasul 2017, suma tuturor numerelor aflate pe cartonașele din spatele fiecărui jucător este aceeași, un număr natural divizibil cu 17.

**Problema 3.** În pătratul  $ABCD$  se ia punctul  $M \in (BC)$ , astfel încât  $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{4}$ . Dreapta  $DM$  intersectează pe  $AC$  în  $Q$  și prelungirea lui  $(AB)$  în  $P$ . Aflați valoarea raportului  $\frac{QM}{DP}$ .

**Problema 4.** Romburile  $ABCD$  și  $DEFG$  au un singur punct comun,  $(AB) \equiv (DE)$ ,  $\angle ABC \equiv \angle DEF$ , iar punctele  $B, D$  și  $F$  sunt coliniare. Demonstrați că:

- a)  $m(\angle ADG) = 90^\circ$ ;
- b) mijlocul segmentului  $[BF]$  este punctul  $L$ , unde  $\{L\} = AE \cap CG$ ;
- c)  $BF \leq 2\sqrt{2} \cdot AB$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



**Olimpiada Națională de Matematică 2016**

**Etapa locală – Iași, 1 februarie 2016**

**CLASA A VIII - A**

**Problema 1.**

Aflați numerele întregi  $a, b, c$  știind că:

$$|a + 3| + b^2 + 4c^2 - 14b - 12c + 55 = 0$$

**Problema 2.**

a) Arătați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ , prima zecimală a numărului  $\sqrt{n^2 + n}$  este 4.

b) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$  știind că prima zecimală a diferenței  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  este 2.

**Problema 3.**

Fie  $ABCD$  paralelogram și  $CDPR$  trapez,  $(CD // RP)$  cu  $(RP) \equiv (BC)$ , situate în plane diferite.

Dacă  $SO // DC$ , unde  $\{O\} = PB \cap AR$  și  $S \in (AP)$ , să se arate că  $SO < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB \cdot BC}$ .

**Problema 4.**

Fie  $AA'$  și  $BB'$  înălțimi în tetraedrul  $ABCD$ , concurente.

a) Arătați că înălțimile  $CC'$  și  $DD'$  sunt tot concurente.

b) Arătați că are loc relația:  $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*